30 de enero de 2004.
Matemáticas II (MA–1112)

1$^{\text{er}}$ Parcial.
TIPO A

Universidad Simón Bolívar.
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

Justifique <u>todas</u> sus respuestas.

1. (9 puntos)
Halle la antiderivada más general de las siguientes funciones:

$$a)\quad f(t)=\frac{\arctan(t)}{1+t^2} \qquad\qquad b)\quad g(u)=\frac{\cos(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}$$

c) Halle el valor de la siguiente integral definida: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(x)}{(1+\cos(x))^2}\,dx$

Solución:

$$a)\quad \frac{\arctan^2(t)}{2}+C \qquad\qquad b)\quad 2\operatorname{sen}(\sqrt{u})+C$$

c) Hacemos $u=1+\cos(x)$, $\quad du=-\operatorname{sen}(x)dx$, $\quad x=0\to u=2$, $\quad x=\dfrac{\pi}{2}\to u=1$

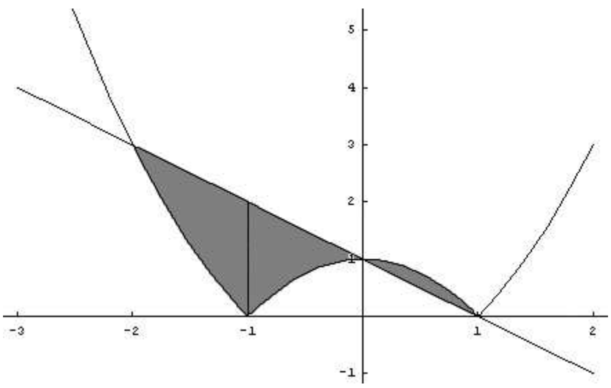
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(x)}{(1+\cos(x))^2}\,dx=\int_2^1 \frac{-du}{u^2}=\left.\frac{1}{u}\right|_2^1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

---

2. (5 puntos) Calcule el área de la región comprendida entre las gráficas de

$$f(x)=1-x \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad g(x)=|x^2-1|.$$

Solución:



$$\text{Área} = \underbrace{\int_{-2}^{-1}[(1-x)-(x^2-1)]dx}_{A}+\underbrace{\int_{-1}^{0}[(1-x)-(1-x^2)]dx}_{B}+\underbrace{\int_{0}^{1}[(1-x^2)-(1-x)]dx}_{C}$$

$$A = \int_{-2}^{-1}(2-x-x^2)dx=\left.\left(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{-2}^{-1}=\left(-2-\frac{1}{2}-\frac{-1}{3}\right)-\left(-4-\frac{4}{2}-\frac{-8}{3}\right)=\frac{7}{6}$$

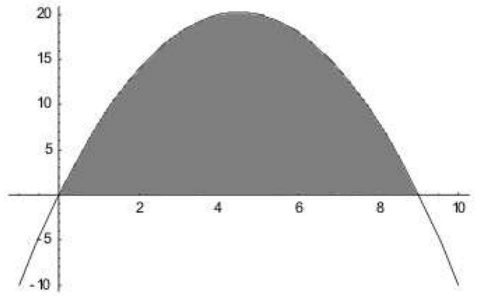
$$B = \int_{-1}^{0}(x^2-x)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\right|_{-1}^{0}=0-\left(\frac{-1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6}$$

$$C = \int_{0}^{1}(x-x^2)dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{0}^{1}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-0=\frac{1}{6}$$

$$\boxed{\text{Área}=\tfrac{13}{6}}$$

3. (5 puntos) Usando sumas de Riemann, calcule el área entre la gráfica de la función $f(x) = 9x - x^2$ y el eje x.

Solución:



$$f(x) = 9x - x^2$$

$$\Delta x_i = \frac{9}{n},$$

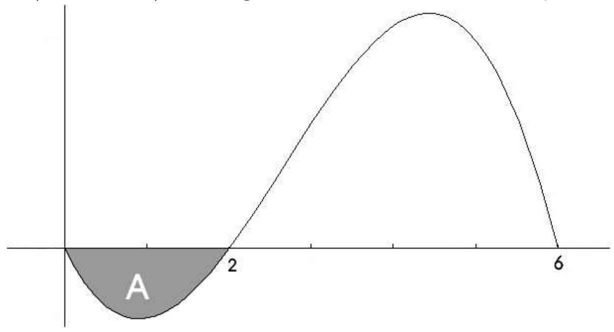
$$x_i = \frac{9i}{n} = \overline{x}_i,$$

$$f(\overline{x}_i) = 9\frac{9i}{n} - \frac{(9i)^2}{n^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{81i}{n} - \frac{81i^2}{n^2}\right)\frac{9}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{729}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^2\right) \\ &= 729 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 729\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 729\frac{1}{6} = \frac{243}{2} \end{aligned}$$

---

4. (6 puntos) La gráfica de la función f es:



si la región sombreada A tiene área $\frac{3}{2}$ y $\int_0^6 f(x)dx = \frac{7}{2}$, calcule

a) $\int_0^6 |f(x)|dx$.

b) El valor promedio de f en $[2,6]$.

Solución:

$$\begin{aligned} \int_0^6 f(x)dx &= \int_0^2 f(x)dx + \int_2^6 f(x)dx \\ \frac{7}{2} &= -\text{Área}(A) + \int_2^6 f(x)dx \\ \frac{7}{2} &= -\frac{3}{2} + \int_2^6 f(x)dx \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\int_2^6 f(x)dx = 5$$

$$\begin{aligned} a)\ \int_0^6 |f(x)|dx &= \int_0^2 (-f(x))dx + \int_2^6 f(x)dx \\ &= \text{Área}(A) + \int_2^6 f(x)dx \\ &= \frac{3}{2} + 5 = \frac{13}{2} \end{aligned}$$

$$b)\ \text{Valor Promedio} = \frac{1}{6-2}\int_2^6 f(x)dx = \frac{5}{4}$$

---

5. (5 puntos) Pruebe que la función

$$H(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt,$$

definida para $x > 0$, es constante.

Solución: Derivando obtenemos que:

$$H'(x) = \left(\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}\right)\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{-1}{x^2+1} + \frac{1}{1+x^2} = 0$$

por lo tanto, $H(x)$ es constante.